

# ポテンシャル関数を用いた利用者均衡配分のパラメータ推定

## 1. 研究背景・目的

高規格道路の整備をはじめとする交通施策は、一般に所要時間を減少させる効果がある一方、クルマが特定の道へ集中して渋滞を引き起こすリスクもあります。そのため、施策が社会の発展に真に貢献するためには、あらかじめ交通量を予測する必要があります。予測手法の一つに利用者均衡配分があります。これは、道路ネットワークにおいて、OD需要（起終点間に生じる交通需要）とリンクコスト関数（リンクごとに交通量と所要時間を対応付ける関数）を与件として、利用されている全経路の所要時間が等しいと仮定し、各リンクの交通量を算定する手法です。

$$t_{ij}(y_{ij}) = \bar{t}_{ij} \left(1 + \alpha \left(\frac{y_{ij}}{\mu_{ij}}\right)^\beta\right)$$

$\bar{t}_{ij}$  : link free travel time  
 $\mu_{ij}$  : link capacity  
 $y_{ij}$  : traffic

リンクコスト関数に用いられる“BPR関数”は自由旅行時間・交通容量・交通量を変数としており、別にパラメータ  $(\alpha, \beta)$  を定めます。既往研究として、観測された実交通量と所要時間から、パラメータを推定した結果が報告されているものの、推定された値の下での利用者均衡状態は必ずしも交通量を再現していない、という課題が存在します。また近年、観測手法の多様化や情報処理技術の発展に伴い、利用できるデータが膨大になってきている点も重要です。

本研究の目的は、BPR関数のパラメータを推定する新たな手法を提案し、交通施策の事前・事後評価の改良につなげることにあります。

## 2. 方針 - Potential Game の性質を用いたパラメータ推定

本研究では、利用者均衡配分が Sandholm (2010)\*1 による Potential Game と呼ばれるゲーム理論のクラスに当てはまることに着目します。

複数の player がおり、それぞれ戦略集合  $S$  から一つの戦略  $i$  を選択するとき、得られる利得を  $F_i$  とし、また戦略  $i$  をとる player 数を  $x_i$  とします。ゲームが「各 Player が独立に行動する」「利得が自身の戦略  $i$  と全体の戦略分布  $x$  に依存する」「利得関数が  $x$  に関して連続である」条件を満たすとき、達成する状態は、自分の戦略をこれ以上変更しても利得が上昇しない「Nash 均衡」となることが知られています。また Potential Game とは  $\nabla f(x) = F(x)$  となる微分可能な関数  $f(x)$  がすべての状態  $x$  に対して存在するゲームであり、状態  $x$  の Potential Game では、ある player が利得を上昇させるために戦略を変更するとき、 $f(x)$  の値は増加します。

Sandholm によれば、ポテンシャル  $g(x)$  を有するゲームで、十分多いプレイヤーが利己的に行動するとき、状態の集合  $X$  のうちある特定の状態  $x$  の起こる確率は

$$g(x) - \max_{\omega \in X} g(\omega)$$

に比例します。

一方、利用者均衡配分の仮定を示す最短経路選択条件は、リンクコスト関数の積分形を最小化する問題に変換することができます（土木学会, 1998 \*2）。

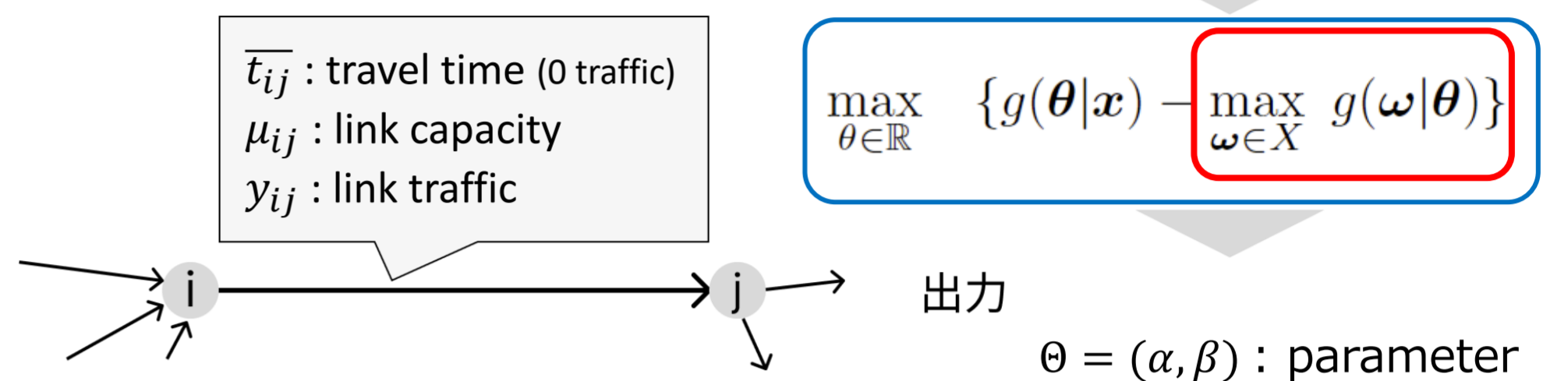
$$\int_0^{y_{ij}} t_{ij}(w) dw = \bar{t}_{ij} \left\{ y_{ij} + \frac{\alpha}{\beta+1} y_{ij} \left(\frac{y_{ij}}{c_{ij}}\right)^\beta \right\}$$

すなわち、利用者均衡配分問題は Potential Game と解釈でき、本題のパラメータ推定は、「現に観測されている交通量配分  $x$  の起こる確率が最大化されるように、パラメータを求める」問題に帰着されます。

## 3. 定式化とアルゴリズム - 階層分割・加速勾配法

ネットワークの各リンクの情報および 与件 ODパターンが得られているときに、  
実現している交通量配分の起きる確率を  
最大化する  $\theta = (\alpha, \beta)$  を計算します。

$\bar{t}_{ij}, \mu_{ij}, y_{ij}$  : 各リンクの情報  
 $q_{rs}$  : ODパターン



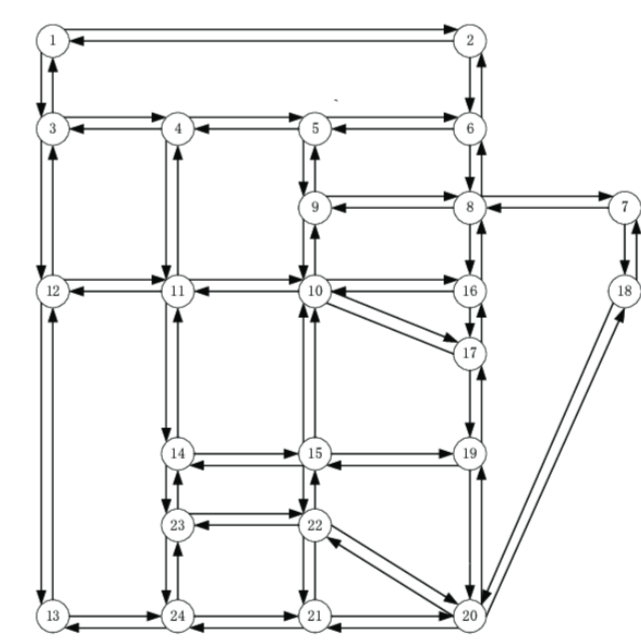
赤囲みの項は、パラメータ  $\theta$  のときの、実行可能領域  $X$  のうちでポテンシャル関数がとりうる最適値を意味します。全体の最適化問題は、この値と、実現している状態  $x$  でのポテンシャル関数の値との差を最適化するものです。

問題の階層分割を行います。赤囲みの項は利用者均衡配分と同一の形をもっています。利用者均衡は凸問題（極値が1つのみ）である事が知られており、Frank-Wolfe 法などのアルゴリズムを利用できます。

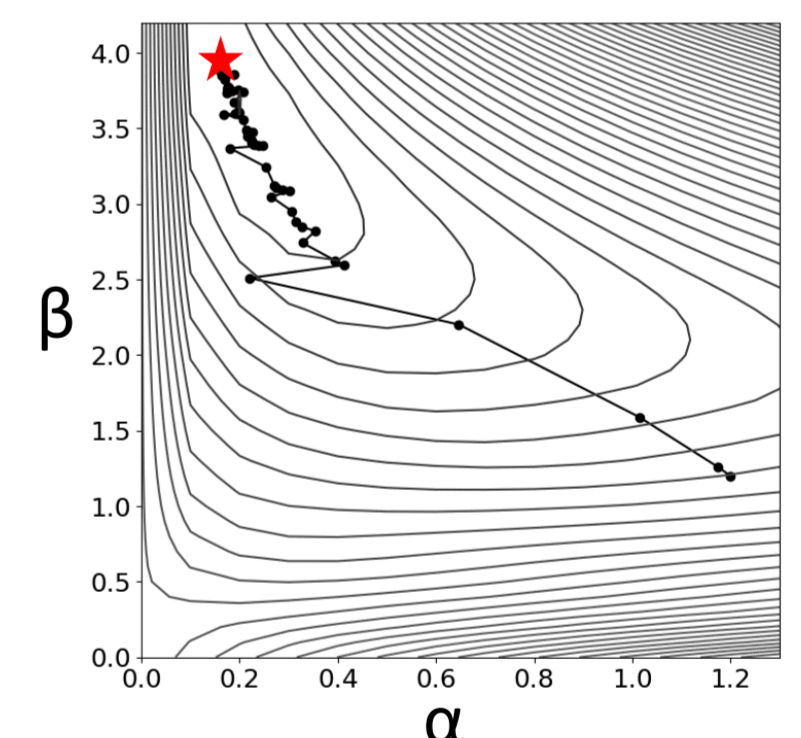
一方で、青囲み（全体）は極値を複数持つ非凸の問題であり、加速勾配法 (Ghadimi, et al., 2016 \*3) と呼ばれるアルゴリズムを活用します。加速勾配法は、ステップサイズの更新において、それまでの更新の情報を保存し、局所最適解を飛び越して大域的な最適解への到達可能性を高めるアルゴリズムです。

## 4. 数値実験と展望

4 個のノードと76本のリンクからなるSioux Falls Network において計算を試みました。



Sioux Falls Network の形状



計算結果

推定パラメータの軌跡、および対応する目的関数の値の等高線を示します。パラメータの初期値を  $(\alpha, \beta) = (1.2, 1.2)$  としたところ、50回以内の計算でパラメータの正解値  $(0.15, 4.0)$  に充分近づく動きが観察されました。

本手法は、利用者均衡配分に限らず、Potential Game の性質をもつ他の状況での推定にも利用できるものと考えられます。

今後の課題として、リンク交通量の一部や交通容量等のデータがない場合に、それらを含めて推定するアルゴリズムの検討や、より大きなネットワークでの計算精度・速度の検証が挙げられます。

## 参考文献

- \*1 : Sandholm, William H (2010). Population games and evolutionary dynamics. MIT press.
- \*2 : 土木学会 (1998). 交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法. 1998 年
- \*3 : Ghadimi, Saeed and Lan, Guanghui (2016). Accelerated gradient methods for nonconvex nonlinear and stochastic programming. Mathematical Programming 156.1-2, pp. 59-99.